Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Análisis Matemático

Derivadas

1. Calcula y simplifica todo lo que puedas las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^3-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

3) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}$ 4) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

5) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+x+1})$ 6) $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$

7) $f(x)=\cos(\cos(\cos x))$ 8) $f(x)=x\operatorname{arc\,sen}x+\sqrt{1-x^2}$

9) $f(x)=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)$ 10) $f(x)=\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)$

11) $f(x)=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2\cos x))$ 12) $f(x)=\cos^2(\operatorname{sen}^2 x)$

13) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{2-\cos x}}$ 14) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\right)$

15) $f(x)=(2+\operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{arc\,tg}x}$ 16) $f(x)=x^{1/\ln x}$

17) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 18) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

2. Calcula todos los valores que toma la función $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}(1/x)$.

3. Prueba que $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,tg}x$ para todo $x\geqslant 0$. ¿Qué pasa di $x<0$?.

4. Calcula la tangente a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en el punto P en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x)=x^2+1,\ P=(3,10)$; b) $f(x)=\cos x,\ P=(\pi/2,0)$.

   c) $f(x)=|x|,\ P=(1,1)$; d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ P=(0,0)$.

5. Calcula un punto c por la condición de que la tangente a la parábola $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ en el punto $(c,f(c))$, sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados $A=(a,f(a))$ y $B=(b,f(b))$.

6. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto genérico (u,v) de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$.

7. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto genérico (u,v) de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

8. Calcula los puntos de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ en los que la tangente a dicha elipse pasa por el punto $(3,1)$.

9. Calcula los puntos de la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=1$ en los que la tangente a dicha hipérbola pasa por el punto $(5,7)$.

10. Calcula dos puntos P, Q de la curva $y=1-x^2$ tales que las tangentes a la curva en dichos puntos formen con el eje de abscisas un triángulo equilátero.

11. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $A=[-1,1]$ y $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; b) $A=\mathbb{R}$ y $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$.

    c) $A=\mathbb{R}$ y $f(x)=\dfrac{2x}{1+|x|}$; d) $A=\mathbb{R}^+_o$ y $f(x)=\begin{cases} x^x & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

12. Prueba que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}^-_o \\ \ln(1+x) & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$$

    es derivable en $\mathbb{R}$ y calcula su función derivada.

13. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Calcula los valores de α y β para que el punto $(2,4)$ pertenezca a la gráfica de f y la recta tangente a la misma en dicho punto esté dada por $2x-y=0$.

14. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2+ax+b, \quad g(x)=x^3-c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

    Calcula los valores de a,b,c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1,2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

15. La gráfica de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx-4$ tiene un punto de inflexión en $x=1$ siendo $f(1)=-6$. ¿Cuál es el valor de b?

16. La gráfica de la función $f(x)=x^3+3x^2+bx+a$ tiene un punto de inflexión. La recta tangente en dicho punto es $y=3x+4$. Calcula las constantes a y b.

17. Calcula en cada caso el valor de a y b en función de c, para que exista la derivada en el punto c de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant c \\ ax+b, & x>c \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x|>c \\ a+bx^2, & |x|\leqslant c \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leqslant c \\ ax+b, & x>c \end{cases}$$

18. Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los valores que se indican en la tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	3	2	5	-5
1	1	0	-2	1
2	2	3	2	1
3	0	1	4	-6

    Calcula una tabla análoga para las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$.

19. Sean f, g funciones derivables y que pueden componerse y sea $h=f\circ g$. Supongamos que:

$$g(1)=3,\ g'(1)=2,\ f'(3)=-1,\ g''(1)=1,\ f''(3)=-2.$$

    Calcula $h'(1)$ y $h''(1)$.

20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par y dos veces derivable. Supongamos que $f(1) = 2$, $f'(-1) = 1$ y $f''(-1) = 0$. Definamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = xf(x^2)$. Calcula $g'(1)$ y $g''(1)$.

21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y definamos $g = f \circ f$. Supongamos que:
$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f'(1) = 1, \quad f'(2) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f''(2) = -1.$$
Calcula $g'(1)$ y $g''(1)$.

22. Calcula las derivadas primera y segunda de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
¿Qué puedes decir de la derivada tercera?

23. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3 - 6x - 2$ se anula en al menos tres puntos del intervalo $[-3, 3]$.

    b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha función no puede anularse en más de tres puntos.

24. Justifica que la ecuación
$$3^x - x^3 - \frac{6}{5} = 0$$
tiene exactamente cuatro soluciones reales.

25. Justifica que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

26. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \cos x - 2 \operatorname{sen} x + \dfrac{x^3}{2}$ se anula en al menos tres puntos.

    b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha función no puede anularse en más de tres puntos.

27. Estudia el número de soluciones de la ecuación $\cos x - \operatorname{sen} x + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{3} = 0$.

28. Prueba, por medio del teorema de Rolle, que la ecuación $5x^4 - 4x + 1 = 0$ tiene alguna solución en $]0, 1[$.

29. Una función polinómica, f, tiene un mínimo relativo en $x = 1$ siendo $f(1) = -1$, un máximo relativo en $x = 2$ siendo $f(2) = 4$, un mínimo relativo en $x = 5$ siendo $f(5) = -7$ y no tiene más puntos críticos. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $f(x) = 0$?

30. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$ según los valores de α.

31. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x = \alpha$ según los valores de α.

32. Calcula el número de ceros de la función polinómica $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ y calcula también el conjunto imagen de dicha función.

33. Prueba que, para cada par de números $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que
$$|\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(ay)| \leqslant |a||x - y|.$$

34. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ y $0 < a < b$. Prueba que
$$na^{n-1}(b - a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$$

35. Sean $0 < x < y$. Prueba que
$$\frac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x < \frac{y-x}{1+x^2}$$

36. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x).$$
¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

37. Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que:
$$i)\ 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x\,; \quad ii)\ \operatorname{sen} x \geqslant \frac{2}{\pi}x$$

38. Prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que
$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x\,\mathrm{e}^x$$

39. Sea $0 < \alpha < 1$. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$.

40. Sea $a > 0$. Prueba que para todo $x > 0$ se verifica que
$$\frac{a\,\mathrm{e}}{x} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a}{x}}$$
y se da la igualdad si, y sólo si, $x = a$.

41. Sea $a > 0$ un número real para el que se verifica que $a^{\frac{x}{a}} \geqslant x$ para todo $x > 0$. Prueba que $a = e$.

42. Dar una condición que deben verificar los números positivos a y b para poder asegura que se verifica una de las desigualdades $a^b < b^a$ o $b^a < a^b$.

43. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que para cada $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$. Prueba que para todo $x \in [0,1]$ es $f(x) = 0$.

44. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determina el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

45. Calcula el área mínima de la región del primer cuadrante del plano limitada por los ejes coordenados y una recta que pasa por el punto $(3, 5)$.

46. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que tenga área máxima.

47. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

48. Con una lámina metálica rectangular de $12 \times 18\mathrm{cm}^2$ se quiere construir una caja sin tapa cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse.

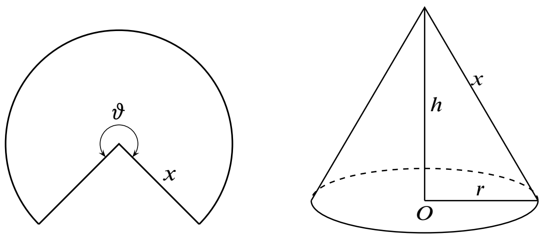
49. Con un alambre de 20 metros queremos formar un triángulo equilátero o un cuadrado o bien ambas figuras de manera que la suma de las áreas sea la mayor posible. Indica cómo debes proceder para lograrlo.

50. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

51. Se quiere imprimir un cartel cuya área total debe ser 6000cm^2 con márgenes de impresión laterales de 6cm y márgenes arriba y abajo de 10cm. Calcula las dimensiones que maximizan el área de impresión.

52. En un cono circular recto de radio en la base r y altura h, el volumen viene dado $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ y el área de su superficie por $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Calcula las dimensiones del cono que teniendo área superficial igual a 1 tiene volumen máximo.

53. Para hacer una tienda de campaña cónica de un volumen determinado, V, necesitamos cortar un sector circular de lona como se indica en la figura donde ϑ es la medida en radianes del ángulo central del sector y x la medida del radio. Calcula las dimensiones de la tienda para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

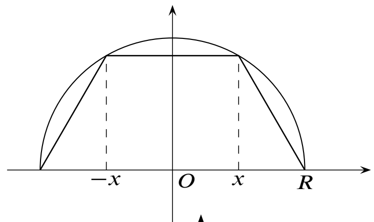


54. a) Calcula un punto de la parábola $y = x^2$ cuya distancia al punto $(6, 3)$ sea mínima.

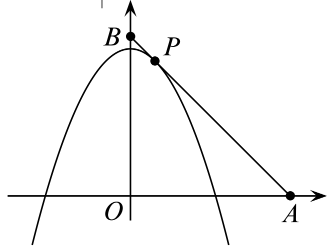
    b) Calcula un punto de la parábola $y = x^2$ tal que la normal en dicho punto pase por el punto $(6, 3)$.

55. Dados los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (2, 2)$, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

56. Calcula las dimensiones del trapecio isósceles de área maxima inscrito en la semicircunferencia superior centrada en el origen de radio R. Justifica que el resultado obtenido es un máximo absoluto.



57. Calcula un punto $P = (u, v)$, con $u > 0$, de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo OAB determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.

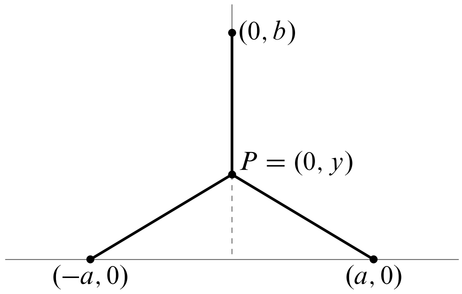


58. Calcula un punto (u, v) $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes coordenados:

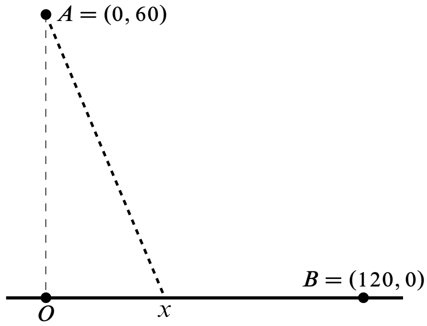
    a) Un triángulo de área mínima.

    b) Un segmento de longitud mínima.

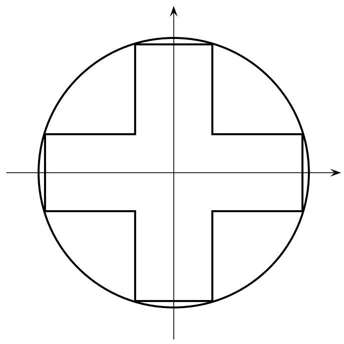
59. Dos fábricas están situadas en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y en $(0, b)$ hay una central eléctrica. Calcula el punto $P = (0, y)$ para que la longitud total del tendido eléctrico desde la central a las fábricas sea mínimo. Debes discutir el resultado según los valores de a y de b.



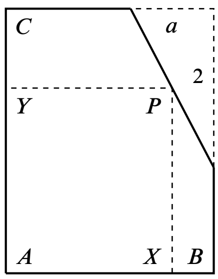
60. Estás en el desierto con tu vehículo en medio de la arena situado en un lugar cuyas coordenadas son $A = (0, 60)$ y tienes que ir a una ciudad cuyas coordenadas son $B = (120, 0)$. Por el origen $O = (0, 0)$ y por la ciudad B pasa una carretera recta asfaltada que los une. En carretera tu velocidad es de 120 kilómetros por hora y sobre la arena es de 80 kilómetros por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a B?



61. Calcula el área maxima de una cruz cuyos lados tienen la misma anchura inscrita en una circunferencia de radio R.

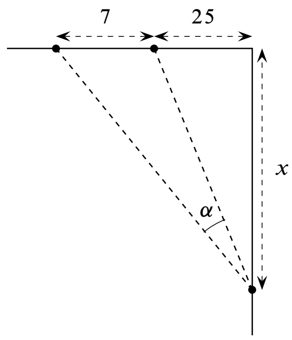


62. La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto P sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices A, X, P, Y tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?

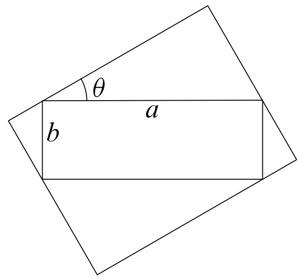


63. Calcula el ángulo de inclinación que deben tener las paredes de un canal con forma de trapecio isósceles cuyas base inferior mide 4m y las paredes laterales 2m para que su área sea máxima. Calcula dicho valor máximo.

64. Un canal abierto cuya sección es un trapecio isósceles de bases horizontales tiene sus paredes laterales formando un ángulo agudo dado α con la base menor del fondo. Conociendo el área A de dicha sección, hallar la profundidad h del canal para la cual la suma de longitudes de la base y paredes laterales es mínima.

65. 

Un futbolista avanza con el balón hacia la portería contraria por el borde del campo. ¿A qué distancia, x, de la línea de meta debe tirar a puerta para que el ángulo de tiro, α, sea máximo?

66. 

Calcula el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado cuyos lados tiene longitudes a y b.

67. Calcula el área del rombo de mínima área circunscrito a una circunferencia de radio r.

68. Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:

$$a)\ \alpha = \sqrt[3]{7} \quad b)\ \alpha = \sqrt{\mathrm{e}} \quad c)\ \alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{2} \quad d)\ \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ)$$

69. Calcula los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$ en el intervalo $[-1, 3]$.

e) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

f) $f(x) = x^a - x^b$ en el intervalo $[0, 1]$ donde se supone que $0 < a < b$.

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x-1|} + \dfrac{1}{1+|x-4|}$ en el intervalo $[-5, 5]$.

70. Sea $f(\vartheta) = 2\operatorname{sen} 2\vartheta + \operatorname{sen} 4\vartheta$.

a) Prueba que ϑ es un punto crítico de f si $\cos 4\vartheta = -\cos 2\vartheta$.

b) Prueba, usando la circunferencia unidad, que $\cos\vartheta_1 = -\cos\vartheta_2$ si, y sólo si, $\vartheta_1 = \pi \pm \vartheta_2 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

c) Prueba que $\cos 4\vartheta = -\cos 2\vartheta$ si, y sólo si, $\vartheta = \pi/2 + k\pi$ o $\vartheta = \pi/6 + k\pi/3$.

d) Calcula los puntos críticos de f en $[0, 2\pi]$ y calcula el conjunto de los valores que toma f en dicho intervalo.

71. Calcula los límites siguientes.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}; \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right); \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x-\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}\right); \qquad \lim_{x\to 0}(1-\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(2+3\,\mathrm{e}^x)}{\sqrt{2+3x^2}}; \qquad \lim_{x\to +\infty}(a^x+x)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}; \qquad \lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{sen}^3 x}; \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2)}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\ln(1+2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x\operatorname{sen} x}; \qquad \lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x+\cos x)^{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{1/x^2}; \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x^2}; \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}; \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+3)}\right)^{x^2\ln x}$$